1. Variables aleatorias continuas

Primero, antes de definir las variables aleatorias continuas, vamos a hablar acerca de algunos detalles que no hemos mencionado antes que son ciertos para cualquier variable aleatoria.

<u>Definición</u>: Si Y es cualquier variable aleatoria, la función de distribución de Y, que se denota $F(y)$, se expresa mediante $F(y) = P(Y \leq y)$ para $-\infty < y < \infty$. Esto también suele llamarse la función de distribución acumulada.

<u>Teorema</u>: Propiedades de una función de distribución. Si $F(y)$ es una función de distribución, entonces

1. $F(-\infty) \equiv \lim_{y\to-\infty} F(y) = 0$.
2. $F(\infty) \equiv \lim_{y\to\infty} F(y) = 1$.
3. $F(y)$ es una función no decreciente de y. Si y_1 y y_2 son valores cualesquiera tales que $y_1 < y_2$, entonces $F(y_1) \leq F(y_2)$.

Teniendo estas dos cosas en cuenta, ahora definamos lo que es una variable aleatoria continua.

<u>Definición</u>: Sea Y una variable aleatoria con función de distribución $F(y)$. Se dice que Y es continua si la función de distribución $F(y)$ es continua para $-\infty < y < \infty$.

<u>Definición</u>: Si $F(y)$ es la función de distribución de una variable aleatoria continua Y, entonces $f(y)$ viene dada por

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = F'(y)$$

siempre y cuando exista la derivada, y se conoce como función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria Y.
Por lo tanto es claro que $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt$.

<u>Teorema</u>: Propiedades de una función de densidad. Si $f(y)$ es una función de densidad, entonces

1. $f(y) \geq 0$ para cualquier valor de y.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1$.

<u>Teorema</u>: Si la variable aleatoria Y tiene una función de densidad $f(y)$ y $a \leq b$, entonces la probabilidad de que Y esté en el intervalo $[a, b]$ es

$$P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b f(y)dy = F(b) - F(a).$$

con $F(y)$ la función de distribución de Y.

<u>Ejemplo</u>. Suponga que Y tiene una función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} ky(1-y) & , \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro punto} \end{cases}$$

a) Halle k para que $f(y)$ sea una función de densidad.
b) Calcule $P(0{,}4 \leq Y \leq 1)$.
c) Encuentre $P(0{,}4 \leq Y < 1)$.
d) Calcule $P(Y < 0{,}4 | Y < 0{,}8)$.

Solución.
a) Para que sea una densidad, su integral de $-\infty$ a ∞ debe dar 1. Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} ky(1-y)dy = 1 \Rightarrow \int_0^1 (ky - ky^2)dy = 1$$

$$\Rightarrow k\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow k = 6.$$

b)

$$P(0{,}4 \leq Y \leq 1) = \int_{0{,}4}^{1} 6y(1-y)dy = 0{,}648.$$

c) Como la integral de un punto es 0, i.e., $\int_a^a f(x)dx = 0$, entonces $P(0{,}4 \leq Y \leq 1) = P(0{,}4 \leq Y < 1)$.

d) Utilizando definición de probabilidad condicional tenemos lo siguiente

$$P(Y < 0{,}4 | Y < 0{,}8) = \frac{P(Y < 0{,}4 \cap Y < 0{,}8)}{P(Y < 0{,}8)} = \frac{P(Y < 0{,}4)}{P(Y < 0{,}8)} = \frac{\int_0^{0{,}4} 6y(1-y)dy}{\int_0^{0{,}8} 6y(1-y)dy}$$

$$= \frac{11}{28}.$$

Ejemplo. Sea la función de distribución de una variable aleatoria Y

$$F(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \leq 0 \\ \frac{y}{8} & , \quad 0 < y < 2 \\ \frac{y^2}{16} & , \quad 2 \leq y < 4 \\ 0 & , \quad y \geq 4 \end{cases}$$

a Halle la función de densidad de Y.
b Calcule $P(1 \leq Y \leq 3)$.
c Encuentre $P(Y \geq 1{,}5)$.
d Calcule $P(Y \geq 1 | Y \leq 3)$.

Solución.
a) La función de densidad no es más que la derivada de la función de distribución por partes, por lo tanto quedaría

$$f(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \leq 0 \\ \frac{1}{8} & , \quad 0 < y < 2 \\ \frac{y}{8} & , \quad 2 \leq y < 4 \\ 0 & , \quad y \geq 4 \end{cases}$$

b) $P(1 \leq Y \leq 3) = F(3) - F(1) = \frac{7}{16}$.

c) $P(Y \geq 1{,}5) = 1 - P(Y \leq 1{,}5) = 1 - P(1{,}5) = \frac{13}{16}$.

d) $P(Y \geq 1 | Y \leq 3) = \frac{P(Y \geq 1 \cap Y \leq 3)}{P(Y \leq 3)} = \frac{P(1 \leq Y \leq 3)}{P(Y \leq 3)} = \frac{F(3) - F(1)}{F(3)} = \frac{7}{9}$.